E.N.S.I. PHYSIQUE & MECANIQUE 1982

Programme TA **PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES** (4 h)

$\mathbb{C}$ est considéré comme un espace vectoriel réel de dimension 2. Toutes les applications rencontrées dans le problème sont des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Dans certaines questions, il est précisé que certaines applications prennent leurs valeurs dans $\mathbb{R}$.

Les trois parties sont largement indépendantes, mais utilisent quelquefois un résultat donné auparavant.

PREMIÈRE PARTIE

$\mathcal{C}$ est l'ensemble des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

$\mathcal{C}1$ est l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, dérivables, à dérivée continue.

Soit $f \in \mathcal{C}$ telle que $f(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$ pour tout t réel, $\alpha(t)$ est réel, $\beta(t)$ est réel. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

On définit $\int_a^b f(t)\,dt$ par $\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b \alpha(t)\,dt + i\int_a^b \beta(t)\,dt$, c'est-à-dire que :

$$\text{Ré}\left(\int_a^b f(t)\,dt\right) = \int_a^b \text{Ré}\,(f(t))\,dt \qquad \text{et} \qquad \text{Im}\left(\int_a^b f(t)\,dt\right) = \int_a^b \text{Im}\,(f(t))\,dt.$$

1° On admet que si $f \in \mathcal{C}$ et si $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, alors $\int_a^c f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt$.

2° On admet que si $f \in \mathcal{C}$, $g \in \mathcal{C}$ et si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,
alors $\int_a^b \big(f(t) + g(t)\big)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt$.

3° On suppose que $f \in \mathcal{C}$, que $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et que $z \in \mathbb{C}$. On note $z = \lambda + i\mu$ où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Démontrer que $\int_a^b zf(t)\,dt = z\int_a^b f(t)\,dt$.

4° On suppose que $f \in \mathcal{C}$ et que $a \in \mathbb{R}$. On définit l'application F de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ par
$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ pour tout réel x.

Démontrer que $F \in \mathcal{C}1$ et que $F' = f$ (on pourra utiliser les fonctions composantes de l'application F).

5° On suppose que $f \in \mathcal{C}$, que $F_1 \in \mathcal{C}1$, que $F_2 \in \mathcal{C}1$, que $F_1' = f$ et que $F_2' = f$. Démontrer que $F_1 - F_2$ est constante.

6° On suppose que $f \in \mathcal{C}$, que $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, que $\mathcal{F} \in \mathcal{C}1$ et que $\mathcal{F}' = f$.
Démontrer que $\int_a^b f(t)\,dt = \mathcal{F}(b) - \mathcal{F}(a)$ (par la suite, l'une des notations $[\mathcal{F}]_a^b$ ou $[\mathcal{F}(t)]_a^b$ ou $[\mathcal{F}(t)]_{t=a}^{t=b}$ désignera $\mathcal{F}(b) - \mathcal{F}(a)$).

7° 1. On suppose que $z \in \mathbb{C}$ et que $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que $g(t) = e^{zt}$ pour tout réel t.
On note $z = \lambda + i\mu$ où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et l'on rappelle que $e^{zt} = e^{\lambda t}(\cos \mu t + i \sin \mu t)$.
Démontrer que g est dérivable et que $g' = zg$.

.../...

7° 2. On suppose que $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, que $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ et que $(\lambda,\mu) \neq (0,0)$. Calculer $\int_a^b e^{(\lambda+i\mu)t}\,dt$.

En déduire que :

$$\int_a^b e^{\lambda t}\cos\mu t\,dt = \left[e^{\lambda t}\left(\frac{\lambda}{\lambda^2+\mu^2}\cos\mu t + \frac{\mu}{\lambda^2+\mu^2}\sin\mu t\right)\right]_a^b$$

$$\int_a^b e^{\lambda t}\sin\mu t\,dt = \left[e^{\lambda t}\left(\frac{\lambda}{\lambda^2+\mu^2}\sin\mu t - \frac{\mu}{\lambda^2+\mu^2}\cos\mu t\right)\right]_a^b$$

8° 1. On suppose que $f \in \mathcal{C}1$, que $g \in \mathcal{C}1$, et que $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Démontrer que $\int_a^b f'(t)\,g(t)\,dt = \left[f(t)\,g(t)\right]_a^b - \int_a^b f(t)\,g'(t)\,dt$.

8° 2. On suppose que $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, que $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ et que $(\lambda,\mu) \neq (0,0)$.

Calculer $\int_a^b t\,e^{(\lambda+i\mu)t}\,dt$. En déduire que :

$$\int_a^b t\,e^{\lambda t}\cos\mu t\,dt = \left[e^{\lambda t}\left(\frac{t\lambda}{\lambda^2+\mu^2} + \frac{\mu^2-\lambda^2}{(\lambda^2+\mu^2)^2}\right)\cos\mu t + e^{\lambda t}\left(\frac{t\mu}{\lambda^2+\mu^2} - \frac{2\lambda\mu}{(\lambda^2+\mu^2)^2}\right)\sin\mu t\right]_a^b$$

$$\int_a^b t\,e^{\lambda t}\sin\mu t\,dt = \left[e^{\lambda t}\left(\frac{t\lambda}{\lambda^2+\mu^2} + \frac{\mu^2-\lambda^2}{(\lambda^2+\mu^2)^2}\right)\sin\mu t + e^{\lambda t}\left(\frac{-t\mu}{\lambda^2+\mu^2} + \frac{2\lambda\mu}{(\lambda^2+\mu^2)^2}\right)\cos\mu t\right]_a^b$$

9° On suppose que $f \in \mathcal{C}$, que $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et que $a \leqslant b$.

Démontrer que $\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,dt$. (Examiner tout d'abord le cas où $\int_a^b f(t)\,dt = 0$. Lorsque $\int_a^b f(t)\,dt \neq 0$, poser $\int_a^b f(t)\,dt = Re^{i\theta}$ où $R > 0$ et θ réel. Poser $e^{-i\theta}f(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$ pour tout réel t, avec $\alpha(t)$ réel et $\beta(t)$ réel. Calculer $\int_a^b e^{-i\theta}f(t)\,dt$ et conclure.)

DEUXIÈME PARTIE

On suppose que $r \in \mathbb{C}$ et que $f \in \mathcal{C}$.

On note p l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telle que $p(t) = e^{rt}$ pour tout réel t.

1° On note :

$$(\mathcal{P})\quad \begin{cases} y : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \text{ dérivable} \\ y' - ry = f \end{cases} \qquad (\mathcal{Q})\quad \begin{cases} Y : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \text{ dérivable} \\ \forall t \in \mathbb{R},\ Y'(t) = e^{-rt}f(t) \end{cases}$$

et pour toute application y de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, on note Y l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telle que $Y(t) = e^{-rt}y(t)$ pour tout réel t.

1° 1. Démontrer que $(\mathcal{P})$ équivaut à $(\mathcal{Q})$.

1° 2. Résoudre $(\mathcal{Q})$. En déduire que les solutions de $(\mathcal{P})$ sont les fonctions y telles que $y(t) = \int_0^t e^{r(t-u)}f(u)\,du + Ce^{rt}$ pour tout réel t, où C est une constante complexe arbitraire.

.../...

En déduire la solution, notée y_0 de $(\mathcal{J})$ $\begin{cases} y : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \quad \text{dérivable} \\ y' - ry = f \\ y(0) = 0 \end{cases}$

2° On suppose que θ est un réel et que $\theta > 0$.

On suppose aussi que $f(t) = 0$ pour tout $t \notin [0, \theta]$.

2° 1. Lorsque $t \geqslant \theta$, exprimer $y_0(t)$ à l'aide de $y_0(\theta)$.

2° 2. On pose $r = \lambda + i\mu$ où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \neq 0$.

Donner une majoration de $|y_0(\theta)|$ à l'aide de $M = \max_{0 \leqslant u \leqslant \theta} |f(u)|$, de θ, de λ, de μ.

2° 3. On suppose de plus que f prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Majorer $|y_0(\theta)|$ à l'aide de $\int_0^\theta f(u)\,du$, de θ, de λ et de μ.

On admet que la formule d'intégration par changement de variable reste vraie pour les fonctions définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$. On suppose que f est périodique, de période T où $T > 0$.

3° 1. Calculer $y_0(t + T)$ en fonction de $y_0(T)$, de $y_0(t)$, de r et de t lorsque t est réel.

3° 2. Lorsque $n \in \mathbb{N}$, calculer $y_0(nT)$ en fonction de $y_0(T)$ de n et de r.

3° 3. On examine le cas particulier

où $r \in \mathbb{R}, r \neq 0$ et où $f(t) = 0$ si $t \notin [0, \theta]$ et $f(t) = 1 - \cos\left(\frac{2\pi}{\theta} t\right)$ si $t \in [0, \theta]$.

Calculer $y_0(\theta)$ et vérifier que cette valeur est compatible avec les résultats obtenus en 2° 2. et 2° 3.

TROISIÈME PARTIE

1° On suppose que $r \in \mathbb{C}$ et que $f \in \mathcal{C}$.

1° 1. On pose $g(u) = e^{ru}$ pour tout réel u et $v(t) = \int_0^t g(t - u) f(u)\,du$.

Démontrer que v est dérivable et que $v'(t) = \int_0^t g'(t - u) f(u)\,du + g(0) f(t)$.

1° 2. Reprendre la question 1° 1. avec cette fois $g(u) = ue^{ru}$ pour tout réel u.

2° 1. On suppose que $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et que l'équation $z^2 + az + b = 0$ a deux racines complexes notées r et s (donc $r \neq s$). On suppose que $f \in \mathcal{C}1$. On pose $g(u) = Ae^{ru} + Be^{su}$ pour tout réel u; $(A, B) \in \mathbb{C}^2$. On pose $v(t) = \int_0^t g(t - u) f(u)\,du$. Démontrer que v est deux fois dérivable et que $v''(t) + av'(t) + bv(t) = f(t)\big(g'(0) + ag(0)\big) + g(0) f'(t)$. Calculer $v(0)$ et $v'(0)$. En déduire une condition suffisante notée (cs) pour que :

$$\begin{cases} v'' + av' + bv = f \\ v(0) = 0 \\ v'(0) = 0 \end{cases}$$

2° 2. On prend les mêmes hypothèses qu'en 2° 1. en remplaçant l'hypothèse $f \in \mathcal{C}1$ par $f \in \mathcal{C}$. On suppose que (cs) est satisfaite

Démontrer que :

— 4 —

$$\begin{cases} v \text{ est deux fois dérivable} \\ v'' + av + bv = f \\ v(0) = 0 \\ v'(0) = 0 \end{cases}$$

Quelle est la solution générale de :

$$\begin{cases} y : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \text{ deux fois dérivable} \\ y'' + ay' + by = f \end{cases}$$

2° 3. En utilisant ce qui précède, rechercher toutes les applications y de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, deux fois dérivables, telles que :

$y'' + 2y' + 5y = f$ où $f(t) = 0$ si $t \notin [0, 2\pi]$ et $f(t) = \sin t$ si $t \in [0, 2\pi]$

3° 1. On suppose que $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et que l'équation $z^2 + az + b = 0$ a une racine complexe double notée r. On suppose que $f \in \mathcal{C}1$. On pose $g(u) = (A + Bu)\, e^{ru}$ pour tout réel u ; $(A, B) \in \mathbb{C}^2$. On pose $v(t) = \int_0^t g(t-u)\, f(u)\, du$. Reprendre les questions de 2° 1.

3° 2. On prend les mêmes hypothèses qu'en 3° 1. en remplaçant l'hypothèse $f \in \mathcal{C}1$ par $f \in \mathcal{C}$. Reprendre les questions de 2° 2.

3° 3. Rechercher toutes les applications y de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, deux fois dérivables, telles que

$y'' + 2y' + y = f$ où $f(t) = 0$ si $t \notin [0, 2\pi]$ et $f(t) = \sin t$ si $t \in [0, 2\pi]$

4° Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(a_1, —, a_n) \in \mathbb{R}^n$; $P(X) = X^n + a_1 X^{n-1} + — + a_{n-1} X + a_n$.

On suppose que le polynôme P a n zéros distincts réels notés $r_1, r_2, —, r_n$.

4° 1. Démontrer qu'il existe $(b_1, —, b_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\dfrac{1}{P(X)} = \dfrac{b_1}{X - r_1} + \dfrac{b_2}{X - r_2} + — + \dfrac{b_n}{X - r_n}$ et démontrer que le n-uplet $(b_1, —, b_n)$ est unique.

4° 2. Écrire de deux manières le développement limité, au voisinage de 0, à l'ordre n, de la fonction définie par $\varphi(t) = \dfrac{1}{P\left(\frac{1}{t}\right)}$ lorsque $t \neq 0$, t appartenant à un certain voisinage de 0.

En déduire n relations liant les coefficients b_i et les zéros r_i.

4° 3. Soit g l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(u) = b_1 e^{r_1 u} + — + b_n e^{r_n u}$ pour tout réel u. Calculer $g(0)$; $g'(0)$; — ; $g^{(n-1)}(0)$.

4° 4. Soit v l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $v(t) = \int_0^t g(t-u)\, f(u)\, du$ pour tout réel t, f étant une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Démontrer que v est n fois dérivable. Calculer $v(0)$; $v'(0)$; — ; $v^{(n-1)}(0)$. Démontrer que $v^{(n)} + a_1 v^{(n-1)} + — + a_n v = f$.

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail